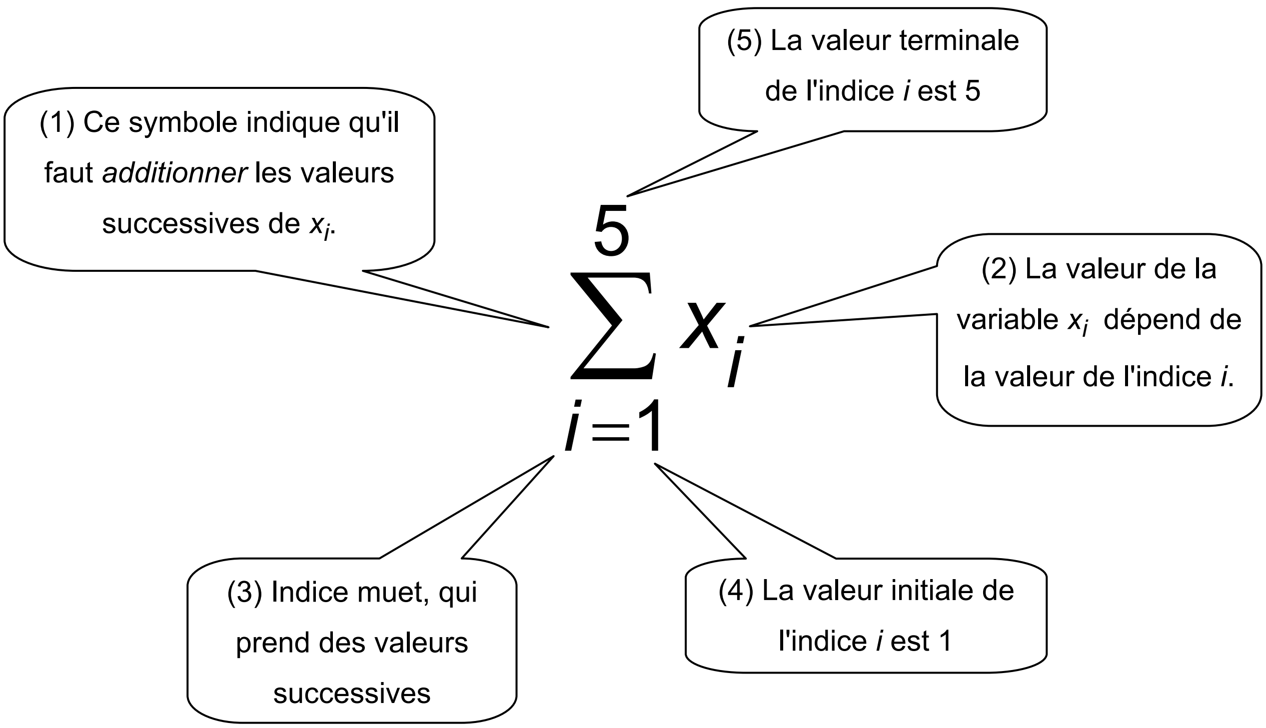
L'OPÉRATEUR SOMMATION (1)

L'opérateur sommation est...

- une façon compacte d'écrire une somme
- lorsque les termes successifs peuvent s'écrire sous la forme d'une expression générale
- qui varie en fonction d'un indice.

« La somme des x_i pour i variant de 1 à 5 »



Exemples :

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Et de façon elliptique

$$\sum_{i} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

L'OPÉRATEUR SOMMATION (2)

Le choix de la lettre qui sert à représenter l'indice muet est parfaitement arbitraire :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Le choix des valeurs initiale et terminale est abitraire :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Dans certains cas, la notation permet de connaître directement la valeur de chacun des termes de la sommation :

$$\sum_{t=1}^{n} t^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{K}\right)$$

Expressions où l'indice joue un double rôle :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Sommes infinies

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

Règles de base d'utilisation de l'opérateur sommation sont les suivantes

1. $\sum_{i=1}^{n} c = n\,c$

2. $\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (c\, x_i) = c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

4. $\sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{t} x_i + \sum_{i=1}^{t} y_i$

L'OPÉRATEUR SOMMATION (3)

Sommations doubles

$$\begin{matrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nm} \end{matrix}$$

La cinquième règle

5. $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} t_{ij}$$

Sommations doubles de tableaux triangulaires

$$\begin{matrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{i}\sum_{j\le i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij} = \sum_{j}\sum_{i\ge j} a_{ij}$$

(noter la différence entre $>$ et $\geq$)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j\le i} a_{ij} - \sum_{i} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j<i} a_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{j}\sum_{i\ge j} a_{ij} - \sum_{i} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j>i} a_{ij}$$