ANNEXE 1-A : QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE

Plan

1. L'opérateur sommation [1]

1.1 DÉFINITION

L'opérateur sommation est simplement une façon compacte d'écrire une somme lorsque les termes successifs peuvent s'écrire sous la forme d'une expression générale qui varie en fonction d'un indice. Par exemple, la somme

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{5} x_i$$

Dans cette expression, i est une variable qui prend successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 : le « i=1 » qu'on trouve sous le Σ indique que la valeur initiale de la variable i est 1 ; le « 5 » qu'on trouve au-dessus du Σ indique que la valeur terminale de la variable i est 5. La variable x_i est une fonction de la variable i, c'est-à-dire que sa valeur dépend de la valeur de i : quand $i = 1$, $x_i = x_1$; quand $i = 2$, $x_i = x_2$; et ainsi de suite. Enfin, le signe Σ indique qu'il faut *additionner* x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5, les valeurs successives de x_i. On lit cette expression de la façon suivante : « la somme des x_i pour i variant de 1 à 5 ».

De façon plus générale, on aura

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

De plus, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur les valeurs initiale et terminale de l'indice, on peut écrire de façon elliptique

$$\sum_{i} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

---

[1] Ce qui suit est largement inspiré de HOHN, Franz E. (1964) *Elementary matrix algebra,* 2nd ed., MacMillan, New York, Annexe I.

Il est à noter que l'indice *i* est un indice muet (*dummy index*). Le choix de la lettre qui sert à représenter l'indice muet est parfaitement arbitraire :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Il y a aussi un certain degré d'arbitraire dans le choix des valeurs initiale et terminale, comme le montre l'exemple suivant :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Il est parfois commode dans les développements mathématiques de pouvoir ainsi décaler l'indice muet.

* * *

Pour calculer la valeur numérique de l'expression

$$\sum_{j} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

il faut connaître les valeurs de x_1, x_2, ..., x_n. Dans certains cas, la notation permet de connaître directement la valeur de chacun des termes de la sommation. Voici quelques exemples :

$$\sum_{t=1}^{n} t^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{K}\right)$$

On trouve aussi des expressions comme

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où l'indice muet joue à la fois un rôle d'indice proprement dit (dans a_j) et un rôle numérique (comme exposant dans x^j).

On utilise aussi l'opérateur sommation pour traiter des sommes infinies comme

$x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$

On emploie alors le symbole ∞ pour désigner la valeur terminale de l'indice :

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

1.2 RÈGLES DE BASE POUR LES SOMMES FINIES

Les règles de base d'utilisation de l'opérateur sommation sont les suivantes :

1. $\sum_{i=1}^{n} c = n\,c$

2. $\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (c\,x_i) = c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

4. $\sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{t} x_i + \sum_{i=1}^{t} y_i$

Toutes ces règles sauf la première peuvent se déduire de la définition

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

La première règle est plutôt une convention, que l'on justifie de la façon suivante. Supposons que la variable x_j soit une constante :

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = c$$

Alors la valeur de la somme est donnée par

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c + c + \cdots + c = n\,c$$

L'expression « $\sum_{i=1}^{n} c$ » est donc interprétée comme « $\sum_{i=1}^{n} x_i$ où $x_i = c$ pour tout i ». De là vient la première règle. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{5} 7 = 5 \times 7 = 35$$

1.3 SOMMATIONS DOUBLES

Supposons que l'on ait à traiter un ensemble de $n \times m$ quantités t_{ij}, avec i = 1, 2, ..., n et j = 1, 2, ..., m. Ces quantités peuvent être disposées sous forme de tableau :

$$\begin{matrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nm} \end{matrix}$$

Pour faire la somme de tous les t_{ij}, on peut d'abord faire le total des termes de chaque ligne, puis additionner les totaux de lignes, ce qui donne

$$\sum_{j=1}^{m} t_{1j} + \sum_{j=1}^{m} t_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} t_{nj}$$

Cette expression peut s'écrire de manière plus compacte à l'aide d'un second opérateur sommation :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} t_{ij} \right)$$

On aurait pu, de façon équivalente, faire d'abord le total des termes de chaque colonne, puis additionner les totaux de colonnes :

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \right)$$

Puisque, de toute évidence, les deux calculs donnent le même résultat, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} t_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \right)$$

Pour cette raison, on omet généralement les parenthèses. On a donc la règle

5. $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_{ij}$$

(La règle 5 ne s'applique pas toujours aux sommations infinies)

On peut évidemment généraliser cette règle à des sommations triples, quadruples, etc.

* * *

Il est à noter que dans une double sommation, l'indice de la sommation extérieure peut apparaître comme valeur initiale ou terminale de la sommation intérieure. Dans ce cas cependant, on ne peut pas intervertir les sommations comme le permet la règle 5. Par exemple, supposons que l'on veuille faire la somme des valeurs du tableau triangulaire suivant

$$\begin{array}{lllll} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

On peut écrire la somme des totaux des lignes

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij}$$

et, de façon plus elliptique,

$$\sum_{i} \sum_{j \le i} a_{ij}$$

Ou encore on peut écrire la somme des totaux des colonnes

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$

et, de façon plus elliptique,

$$\sum_{j} \sum_{i \ge j} a_{ij}$$

Toutefois, on **ne pourrait pas** écrire $\sum_{i \ge j} \sum_{j} a_{ij}$: cela n'aurait aucun sens. En effet, l'expression $\sum_{j} \sum_{i \ge j} a_{ij}$ signifie $\sum_{j} \left(\sum_{i \ge j} a_{ij} \right)$: la seconde sommation s'effectue à l'intérieur de la première. C'est pourquoi la valeur initiale de la première sommation ne peut pas dépendre de l'indice de la sommation intérieure (la seconde sommation).

Supposons que l'on veuille exclure de la somme les termes de la diagonale du tableau (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}). On écrit alors (noter la différence entre $<$ et $\le$)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j\leq i} a_{ij} - \sum_{i} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j<i} a_{ij}$$

ou (noter la différence entre $>$ et $\geq$)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{j}\sum_{i\geq j} a_{ij} - \sum_{i} a_{ii} = \sum_{i}\sum_{j>i} a_{ij}$$

NOTE : L'OPÉRATEUR PRODUIT

L'opérateur produit est analogue à l'opérateur sommation. Il sert à écrire de façon compacte des produits :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

L'emploi de l'opérateur produit suit les règles suivantes :

1. $\prod_{j=1}^{n} c = c^n$

2. $\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)\left(\prod_{j=k+1}^{n} x_j\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)$

3. $\prod_{j=1}^{n} k\, x_j = k^n\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)$

4. $\prod_{j=1}^{n} x_j y_j = \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n} y_j\right)$

5. $\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} x_{ij} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} x_{ij}$

EXERCICES SUR L'OPÉRATEUR SOMMATION

1. Dans ce qui suit, les valeurs des x_i sont données par l'équation

$$x_i = 5 + 3\, i$$

Évaluez les expressions suivantes.

1.1 $\sum_{k=1}^{4} x_k$

1.2 $\sum_{i=0}^{3} x_i$

1.3 $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}$ pour $n = 4$

2. Calculez

2.1 $\sum_{x=2}^{3} x^3$

2.2 $\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{1}{i} \right)$

2.3 $\sum_{j=1}^{10} a$, pour $a = 345$

3. Démontrez les règles suivantes en explicitant les expressions à partir de la définition de l'opérateur sommation :

3.1 $\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$

3.2 $\sum_{i=1}^{n} (c\, x_i) = c \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)$

3.3 $\sum_{i=1}^{t} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{t} x_i + \sum_{i=1}^{t} y_i$

4. Dans ce qui suit, on manipule des données disposées sous forme de tableau :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 50 \\ 5 & 30 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Évaluez les expressions suivantes :

4.1 $\sum_{i} \sum_{j} a_{ij}$

4.2 $\sum_{i} a_{2i}$

4.3 $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} a_{ij}$

4.4 $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}$

4.5 $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}$

4.6 $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{i} a_{ij}$

4.7 $\sum_{i} \sum_{j>i} a_{ij}$

4.8 $\sum_{i} \sum_{j \leq i} a_{ij}$

Les solutions à ces exercices sont données à la fin de l'annexe.

2. Les logarithmes et la fonction exponentielle

2.1 LES EXPOSANTS

Pour un nombre réel positif b et un nombre entier positif n, l'expression

$$b^n$$

signifie par définition

$$b \times b \times \ldots \times b$$

où le nombre réel b apparaît n fois. De cette définition, il découle :

1. $b^m \times b^n = b^{m+n}$
2. $b^m \div b^n = b^{m-n}$ lorsque $m > n$
3. $(b^n)^m = b^{m\times n}$

Suivant la définition que nous en avons donnée initialement, l'expression b^n n'a de sens que pour n entier positif. Les trois règles qui précèdent conduisent toutefois aux généralisations suivantes.

Lorsque $m=n$,

$$b^0 = b^{m-n} = b^m \div b^n = 1$$

On a aussi

$$b^{-n} = b^{0-n} = b^0 \div b^n = 1 \div b^n = \frac{1}{b^n}$$

Enfin, si a est la racine n ème de b, c'est-à-dire si $a = \sqrt[n]{b}$, alors $a^n = b$. On a donc

$$b^{\left(1/n\right)} = \left(a^n\right)^{\left(1/n\right)} = \left(a^{n\times\left(1/n\right)}\right) = a^{\left(n/n\right)} = a = \sqrt[n]{b}$$

Et plus généralement

$$b^{\left(m/n\right)} = \sqrt[n]{b^m}$$

À la suite de ces généralisations, l'expression b^r est définie pour tout nombre réel positif b et pour tout nombre rationnel $r = \dfrac{m}{n}$. Quant aux nombres irrationnels, ils peuvent être atteints par une suite convergente de nombres rationnels, ce qui permet de donner un sens à l'expression

b^r, non seulement lorsque r est un nombre rationnel, mais plus généralement lorsque r est un nombre réel, que ce nombre soit rationnel ou irrationnel.

2.2 LES LOGARITHMES

Les logarithmes, comme l'opérateur sommation, ne sont rien d'autre qu'une convention d'écriture. L'expression

$$x = \log_b y$$

se lit « x est le logarithme de y dans le système de base b » ou, plus simplement, « x est le logarithme de y à base b ». Elle signifie tout simplement que si l'on élève b à la puissance x, on obtient y :

$$y = b^x = b^{\log_b x}$$

Par exemple,

$\log_{10} 1 = 0$

$\log_{10} 10 = 1$

$\log_{10} 100 = 2$

$\log_{10} 1000 = 3$

et ainsi de suite.

Le logarithme à base 10 d'un nombre qui n'est pas une puissance entière de 10 ne sera pas un nombre entier. Par exemple [2],

$\log_{10} 2 = 0{,}30103$ signifie $10^{0{,}30103} = 2$

$\log_{10} 12 = 1{,}07918$ signifie $10^{1{,}07918} = 12$

Les bases de logarithmes les plus fréquemment utilisées sont 10 et le nombre irrationnel $e = 2{,}71828\ldots$ Les logarithmes à base 10 sont appelés « communs », alors que les logarithmes à base e sont appelés « naturels » ou « népériens » [3]. On utilise souvent la notation $\ln y$ au lieu de $\log_e y$ pour désigner le logarithme népérien de y.

---

2 Dans les tables de logarithmes que l'on utilisait avant les Lotus et autres Excel, le logarithme était décomposé en deux parties : la partie entière s'appelait la *caractéristique*, et la partie fractionnelle, la *mantisse*. Dans log 12, la caractéristique est égale à 1 et la mantisse, à 07918.

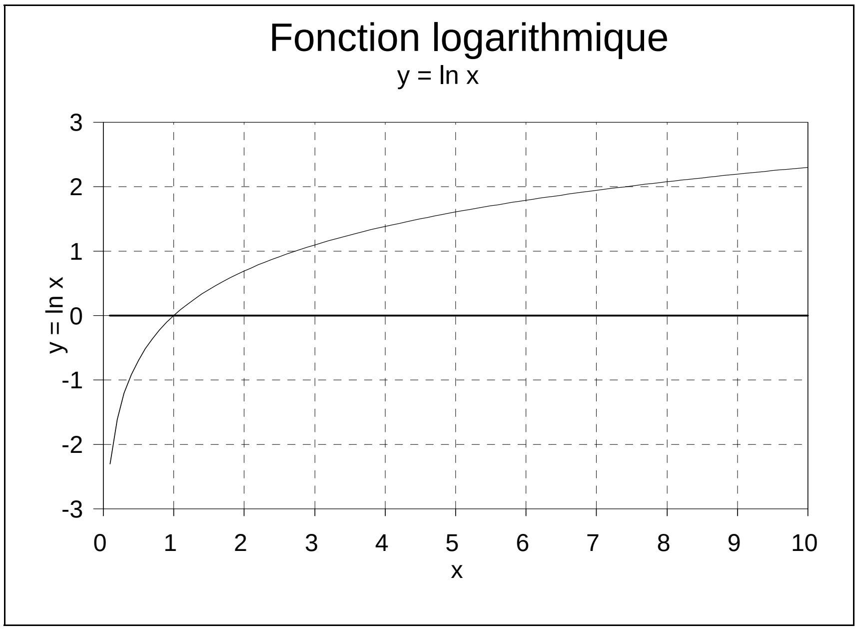
3 Du nom de leur inventeur, le théologien et mathématicien écossais John Napier (1550-1617), dont le nom s'écrit aussi « Neper ».

L'opération qui consiste à trouver un nombre à partir de son logarithme est parfois désignée par l'expression « antilog » ; ainsi, on a l'équivalence suivante

$\text{antilog}_b\, x = b^x$

Donc, antilog $x = e^x$ ou 10^x, selon que l'on considère x comme un logarithme népérien à base e ou comme un logarithme commun à base 10.

La figure suivante illustre la relation entre un nombre et son logarithme.



On remarque que le logarithme est une transformation « monotone croissante » : si $y_1 > y_2$, alors $\log y_1 > \log y_2$; cela est évident si l'on se rappelle que, par définition, y et $\log y$ sont liés par la relation $y = b^{\log y}$.

Les règles qui s'appliquent aux exposants se transposent aux logarithmes.

La règle $b^m \times b^n = b^{m+n}$ implique

$\log (y \times z) = \log y + \log z$

La règle $b^m \div b^n = b^{m-n}$ implique

$\log\left(\dfrac{y}{z}\right) = \log y - \log z$

La règle $(b^n)^m = b^{m\times n}$ implique

$\log y^r = r \times \log y$

De cette dernière règle, on peut déduire celle du passage d'une base à l'autre. Supposons qu'on veuille passer du logarithme commun à base 10 au logarithme népérien à base *e*. Puisque $x = \log_{10} y$ signifie $10^x = y$, on a

$$\log_e y = \log_e 10^x = x \log_e 10 = \log_{10} y \times \log_e 10$$

Les figures suivantes montrent comment les transformations logarithmiques changent la forme des relations entre variables. Les relations représentées sont :

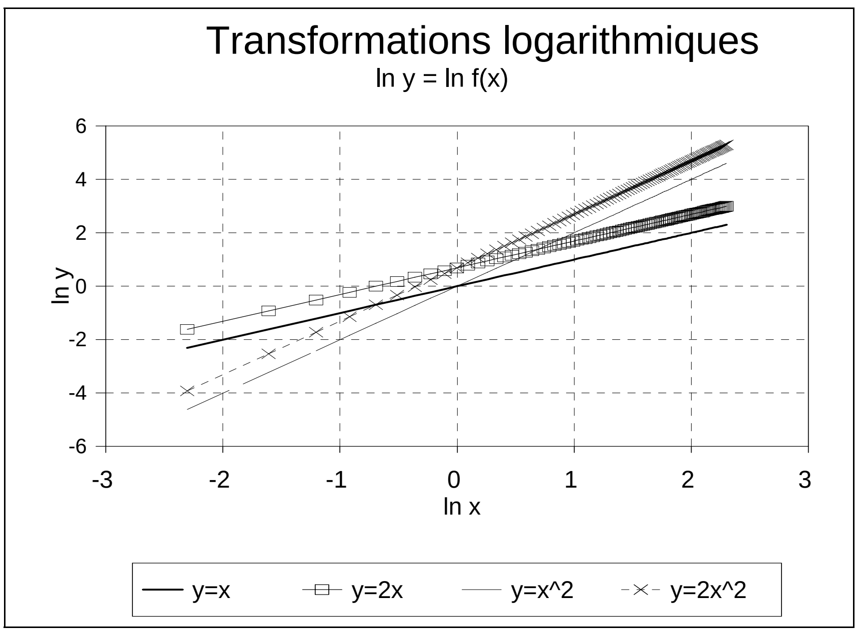
$$y = x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x$$

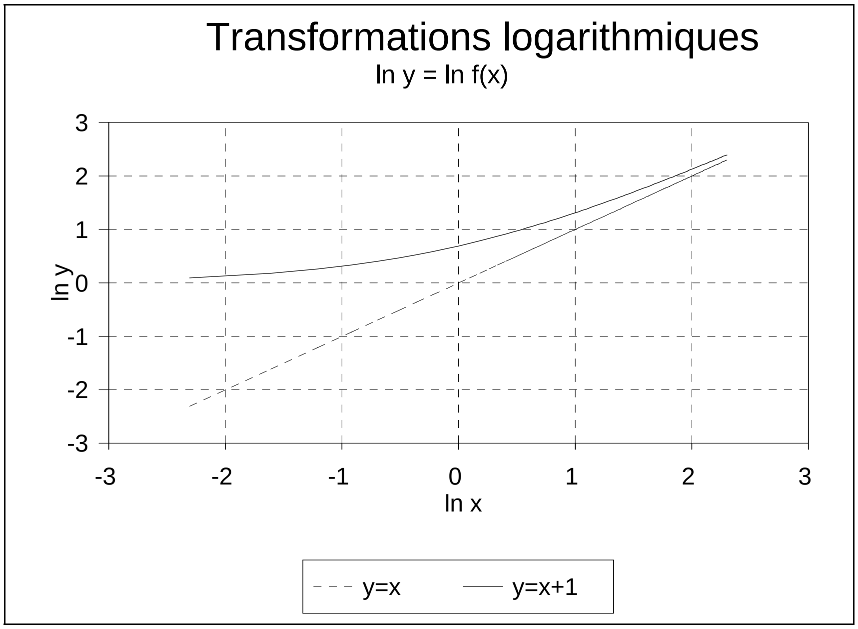
$$y = 2\,x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln 2 + \ln x$$

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln y = 2 \ln x$$

$$y = 2\,x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln 2 + 2 \ln x$$

$$y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln (x + 1)$$





On constate qu'après transformation logarithmique, des relations non linéaires deviennent linéaires et des relations linéaires deviennent non linéaires [4].

2.3 LA FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction

$$y = e^x$$

aussi dénotée $y = \exp(x)$, ou, plus rarement, $y = \text{antilog}_e\, x$, s'appelle la fonction exponentielle.

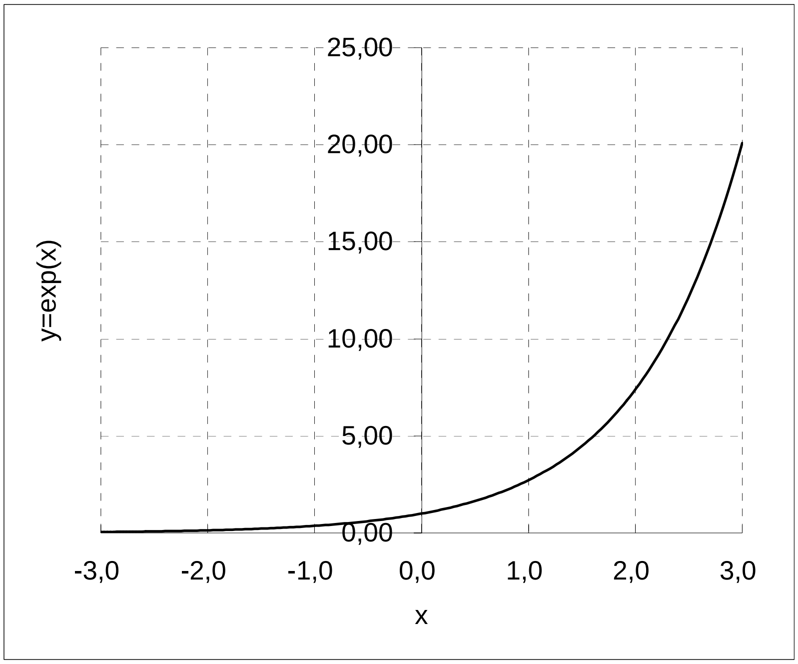
On emploie aussi l'exponentielle négative, de la forme

$$y = \exp(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

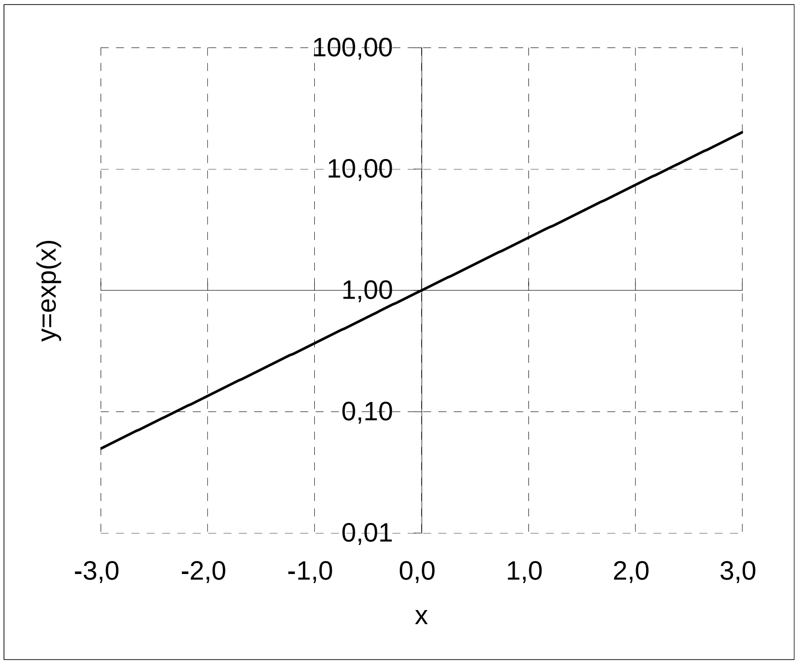
Les figures suivantes illustrent la fonction exponentielle.

4 Voir WONNACOTT, Thomas H. et WONNACOTT, Ronald J (1992) *Statistique : économie, gestion, sciences, médecine*, 4e éd., Economica, p 513-523, « La non-linéarité résolue grâce aux logarithmes ».

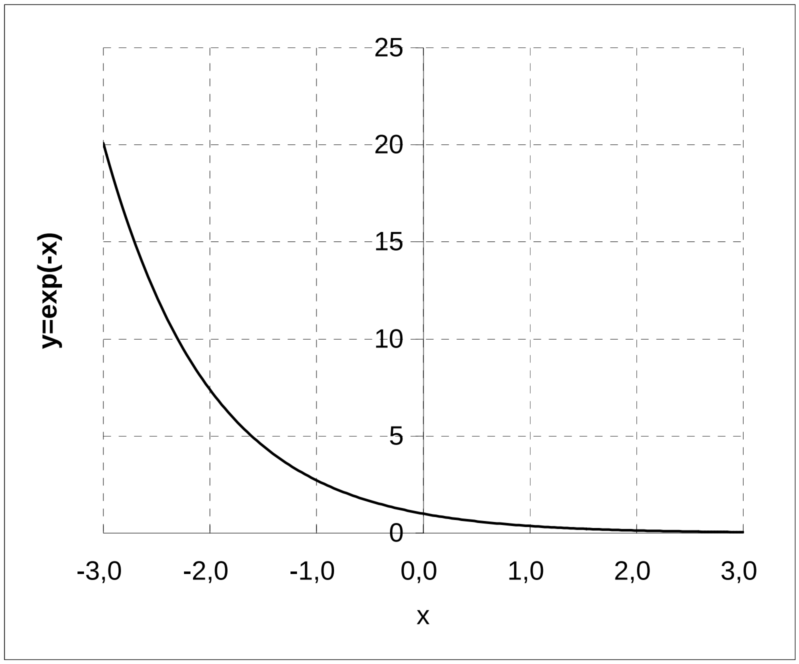
Fonction exponentielle
y **= exp(*x*)**



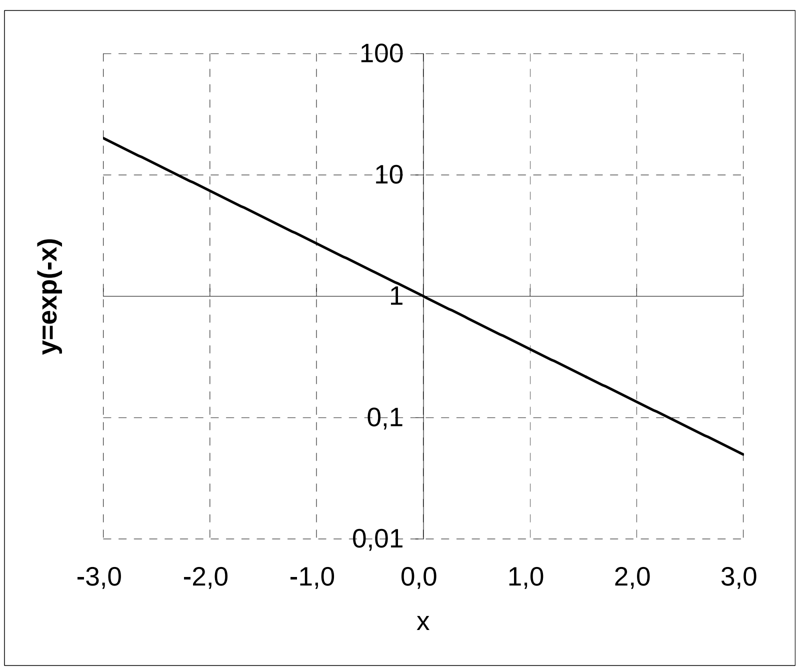
Fonction exponentielle
y **= exp(*x*)**
Échelle verticale logarithmique



Fonction exponentielle négative
***y* = exp(–*x*)**



Fonction exponentielle négative
***y* = exp(–*x*)**
Échelle verticale logarithmique



2.4 POURQUOI LES LOGARITHMES NÉPÉRIENS ?

Le nombre e est défini comme la limite d'une suite infinie :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

L'intérêt de cette constante népérienne vient de l'analyse de la croissance exponentielle. Si, à partir d'une valeur initiale q_0, une quantité q est multipliée à chaque période par un facteur $(1+r)$, au bout de t périodes, cette quantité sera de

$$q = q_0\,(1+r)^t$$

C'est la formule de la croissance géométrique d'un montant auquel on applique un intérêt composé une fois par période. Supposons que l'on multiplie par n la fréquence à laquelle l'intérêt est composé. On a

$$q' = q_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\,t}$$

Qu'arrive-t-il lorsque n devient très grand (c'est-à-dire lorsque n tend vers l'infini et que l'intérêt est composé de façon continue) ? Pour le voir, récrivons l'équation précédente sous la forme suivante

$$q' = q_0\left\{\left[1+\frac{1}{\left(n/r\right)}\right]^{n/r}\right\}^{r\,t}$$

Lorsque n tend vers l'infini, n/r tend aussi vers l'infini et l'expression entre accolades tend vers la constante e. On obtient donc

$$\lim_{n\to\infty} q' = q_0\; e^{r\,t}$$

C'est la formule de la croissance exponentielle, qui est la version continue de la croissance géométrique.

Solutions des exercices sur l'opérateur sommation

1.1 $\sum_{k=1}^{4} x_k = (5+3)+(5+6)+(5+9)+(5+12) = 50$

1.2 $\sum_{i=0}^{3} x_i = (5+0)+(5+3)+(5+6)+(5+9) = 38$

1.3 Pour $n = 4$, $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \sum_{i=0}^{3} x_{i+1} = \sum_{i=1}^{4} x_i = 50$

2.1 $\sum_{x=2}^{3} x^3 = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$

2.2 $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$

2.3 Pour $a = 345$, $\sum_{j=1}^{10} a = 10\ a = 3450$

3.1 $\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_k\right) + \left(x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n\right)$

$\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

3.2 $\sum_{i=1}^{n} \left(cx_i\right) = cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n = c\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) = c\sum_{i=1}^{n} x_i$

3.3 $\sum_{i=1}^{t} \left(x_i + y_i\right) = \left(x_1 + y_1\right) + \left(x_2 + y_2\right) + \cdots + \left(x_t + y_t\right)$

$\sum_{i=1}^{t} \left(x_i + y_i\right) = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_t\right) + \left(y_1 + y_2 + \cdots + y_t\right) = \sum_{i=1}^{t} x_i + \sum_{i=1}^{t} y_i$

4.1 $\sum_i \sum_j a_{ij} = 4 + 50 + 5 + 30 + 6 + 10 = 105$

4.2 $\sum_i a_{2i} = 5 + 30 = 35$

4.3 $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} = (4+5) + (50+30) = 89$

4.4 $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} = (4+50) + (5+30) = 89$

4.5 $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{j} a_{ij} = (4) + (50 + 30) = 84$

4.6 $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = (4) + (5 + 30) = 39$

4.7 $\sum_{i} \sum_{j>i} a_{ij} = 50$

4.8 $\sum_{i} \sum_{j \leq i} a_{ij} = (4) + (5 + 30) + (6 + 10) = 55$